Toets 1 Calculus 1 AESB110, 27 sept. 2013

1. De vergelijking van een bol met middelpunt (m_1, m_2, m_3) en straal R is:

$$(x-m_1)^2+(y-m_2)^2+(z-m_3)^2=R^2$$

Probeer (mbv kwadraat afsplitsen) de vergelijking in deze vorm te krijgen:

$$x^2+y^2+z^2=x-2y+2z$$

$$\left(x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\right)+\left(y^2+2y+1\right)+\left(z^2-2z+1\right)=\tfrac{1}{4}+1+1$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=\frac{9}{4}$$

Inderdaad de vergelijking van een bol, middelpunt $\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ en straal $\frac{3}{2}$

2. $\underline{a}\cdot\underline{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\underline{a}|^2$, dus $|\underline{a}|=\sqrt{4}=2$, analoog $|\underline{b}|=\sqrt{9}=3$.

$$\cos\theta=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}=\frac{-3}{2\cdot 3}=-\frac{1}{2}$$

Dus de hoek tussen $\underline{a}$ en $\underline{b}$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$

3. $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

a) Dus f is linkscontinu in 0 voor $p=-\frac{\pi}{2}$

b) en rechtscontinu in 0 voor $p=\frac{\pi}{2}$.

4. Impliciet differentiëren, differentieer naar x, y is een functie van x.

$$\frac{1}{xy-2}(y+xy')+1+2yy'=0$$

in $(3,1)$: $1+3y'+1+2y'=0 \to y'=-\frac{2}{5}$

5. $g(x) = \arccos\sqrt{x}$

a) $\sqrt{x}$ is gedefinieerd voor $x \geq 0$,

$\arccos\sqrt{x}$ is gedefinieerd voor $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$

Dus $0 \leq x \leq 1$. $D_g = [0, 1]$

b) $0 \leq x \leq 1$

$0 \leq \sqrt{x} \leq 1$

$0 \leq \arccos\sqrt{x} \leq \frac{\pi}{2}$, $B_g = [0, \frac{\pi}{2}]$

c) $g(\frac{1}{4}) = \arccos\sqrt{\frac{1}{4}} = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

d) $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}}$

$g'(\frac{1}{2}) = \dfrac{-1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

6. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + x - \frac{\pi}{2}}{1 - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x + 1}{-\cos x} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{\sin x} = 0.$$

2 keer l'Hospital gebruikt, situatie $(\frac{0}{0})$